13

# Approximation (fct en escaliers)

→ $\forall f \in C_{pm}([a,b],E)\ \exists g \in \mathcal{C}([a,b],E)$ et $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],E)$
$f = \varphi + g$

$\overset{*}{\rightarrow}$ pour tout $\varepsilon > 0$ et $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],E)$ il existe $\varphi \in \mathcal{E}([a,b],E)$ tq $\|f - \varphi\|_{\infty}^{\mathcal{C}^0_{pm}} \leq \varepsilon$ $\left(\Rightarrow \mathcal{C}_{pm}([a,b],E) \subset \overline{\mathcal{E}([a,b],E)}\right)$

→ $\varphi_n \xrightarrow[\text{unif}]{[a,b]} f \Rightarrow I(\varphi_n) \to \int_a^b f$. (escalier)

→ $f \in \mathcal{C}_{pm}([a,b],E)$ : $F(x) = \int_a^x f$ lip et $\begin{cases} F'_d(x^+) = f(x^+) \\ F'_g(x) = f(x^-) \end{cases}$

→ Sommes de riemann : $\left| \begin{array}{l} \sigma_p = (x_{0,p} \cdots x_{n_p,p}),\ \max(x_{k+1,p} - x_{k,p}) \longrightarrow 0 \\ c_{k,p} \in [x_{k,p}, x_{k+1,p}] \end{array} \right.$

$$S_p(f) = \sum_{k=0}^{n_p - 1} (x_{k+1,p} - x_{k,p})\, f(c_{k,p}) \longrightarrow \int_a^b f. \ (\text{unif } \mathcal{C}^0)$$

→ (*) admet une version avec les fct APM.

→ $f \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R}), \exists \varphi_n \in \mathcal{C}^1([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$
$\varphi_n \xrightarrow{CVU} f$ et si $f$ K-lip, les $\varphi_n$ aussi.
$\left(\varphi_h = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt\right)$
$h = \frac{1}{n}$

utile → Weierstrass : $f \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{C})\ \exists (P_n) \in \mathbb{C}[X]^{\mathbb{N}} : P_n \xrightarrow{CVU} f$

→ [Ex] l'algèbre des polynômes sur $[a,b]$ est dense dans $\mathcal{C}_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ pour $\| \ \|_1$ et $\| \ \|_2$

→ Th des moments : $f \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{C})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ $\int_a^b f(t)t^n dt = 0$ alors $f$ est nulle